**LAHENDUSED 9.KLASS**

1. Vastus: **1) 84 kommi; 2) 72 kommi.**

Lahendus.

1)Jagades komme suhtes 3 : 4 : 5, saab noorim vend $3x$, keskmine $4x$ ja vanim $5x$ kommi, kus $x$ on mingi naturaalarv. Seega kokku on komme $3x + 4x + 5x = 12x$.

Kui jagada kommid suhtes 6 : 7 : 8, saab noorim vend $6y$, keskmine $7y$ ja vanim $8y$ kommi, kus $y$ on mingi naturaalarv. Seega sel juhul on komme kokku $6y + 7y + 8y = 21y$.

Kuna kommide koguarv ei muutunud, siis peab kehtima võrdus $12x = 21y$ ehk $4x = 7y$.

Otsime naturaalarvu $x$ vähima võimaliku väärtuse, mille korral saadud võrdus kehtib. Ilmselt on selleks arv 7 (kuna $x$ peab jaguma 7-ga).

Järelikult vendadel oli kokku vähemalt $12x = 12 \cdot 7 = 84$ kommi.

2)Pärast kommide esimest jagamist saaks noorim vend $3x$ kommi ja pärast teist jagamist $6y$ kommi. Kuna teisel korral ta saaks 9 kommi rohkem, siis peaks kehtima võrdus $6y - 3x = 9$ ehk $x = 2y - 3$.

Asendades saadud $x$ väärtust võrrandis $4x = 7y$ saame võrrandi $4(2y - 3) = 7y$, kust $y = 12$. Järelikult noorim vend saaks lõpuks $6y = 6 \cdot 12 = 72$ kommi.

Hindamisskeem:

*1) osa:*

| | |
|---|---|
| avaldatud vähemalt ühest antud suhtest vendade poolt saadud kommide arvud (nt $3x$, $4x$ ja $5x$) | 1p |
| leitud kommide koguarvud mõlemal jaotamisel (nt $12x$ ja $21y$) | 1p |
| koostatud võrdus lähtudes sellest, et kommide koguarv ei muutunud (nt $12x = 21y$) | 1p |
| leitud vähim võimalik kommide koguarv 84 | 1p |
| *2) osa:* | |
| koostatud võrdus noorima venna poolt saadud kommide arvude alusel (nt $6y - 3x = 9$) | 1p |
| kahe saadud tingimuse (nt $12x = 21y$ ja $6y - 3x = 9$) põhjal leitud vähemalt ühe muutuja väärtus | 1p |
| leitud, et noorim vend saaks lõpuks 72 kommi | 1p |
| | **7p** |

Ainult õigete vastuste eest anda 1p+1p=2p.

**2.** Vastus: $\boldsymbol{a = 1007,5}$

Lahendus: Alustame avaldise $\frac{a-b}{c} = \frac{a-c}{b}$ teisendamisega.

Selleks on mitu võimalust. Näiteks

$$0 = \frac{a-b}{c} - \frac{a-c}{b} = \frac{ab - b^2 - ac + c^2}{bc},$$

kust positiivsete arvude $a$, $b$ ja $c$ korral järeldame võrduse $ab - b^2 - ac + c^2 = 0$.

Või näiteks sama tulemuseni jõuame ka siis, kui korrutame võrduse mõlemad pooled positiivse arvuga $bc$. Siis saame

$$b(a-b) = c(a-c)$$
$$ab - b^2 = ac - c^2.$$

Seejärel rakendame rühmitamisvõtet:

$$0 = ab - b^2 - ac + c^2 = (c^2 - b^2) - (ac - ab) = (c-b)(c+b) - a(c-b) =$$
$$= (c-b)(b+c-a).$$

Kuna arvud $a$, $b$ ja $c$ on paarikaupa erinevad, siis $c - b \neq 0$. Järelikult $b + c - a = 0$, millest järeldub, et $a = b + c$.

Või näiteks võrdusest $ab - b^2 = ac - c^2$ saame võrdused

$$ab - ac = b^2 - c^2$$
$$a(b-c) = (b-c)(b+c),$$

mille jagamisel nullist erineva arvuga $b - c$ saame seose $a = b + c$.

Võtame ette teise tingimuse $a + b + c = 2015$. Kuna $b + c = a$, siis

$$a + a = 2015$$
$$2a = 2015$$
$$a = 1007{,}5.$$

Hindamisskeem 1:

| | |
|---|---|
| võrdus $\frac{a-b}{c} = \frac{a-c}{b}$ teisendatud nt kujule $ab - b^2 - ac + c^2 = 0$ | 2p |
| avaldis $ab - b^2 - ac + c^2$ tegurdatud (nt $(c-b)(b+c-a)$) | 2p |
| järeldatud (koos põhjendustega) võrdus $a = b + c$ | 2p |
| leitud $a = 1007{,}5$ | 1p |
| | **7p** |

Hindamisskeem 2:

| | |
|---|---|
| võrdus $\frac{a-b}{c} = \frac{a-c}{b}$ teisendatud nt kujule $ab - b^2 = ac - c^2$ | 2p |
| saadud võrdus teisendatud nt kujule $a(b-c) = (b-c)(b+c)$ | 2p |
| järeldatud (koos põhjendustega) võrdus $a = b + c$ | 2p |
| leitud $a = 1007{,}5$ | 1p |
| | **7p** |

Ainult õige vastuse eest anda 1 punkt.

**3.** Vastus: **2925**

Lahendus.

Olgu $n = \overline{abac}$ neljakohaline arv, kus $a$, $b$ ja $c$ on numbrid ning $a \neq 0$.

Kustutades sajaliste numbri $b$ saame kolmekohalise arvu $\overline{aac}$, mis on 13 korda arvust $n$ väiksem, st

$$\overline{abac} = 13 \cdot \overline{aac}$$

$$1000a + 100b + 10a + c = 13(100a + 10a + c)$$

$$1010a + 100b + c = 1430a + 13c$$

$$100b = 420a + 12c$$

$$25b = 105a + 3c$$

Kuna $3c = 25b - 105a = 5(5b - 21a)$, siis number $c$ peab jaguma 5-ga. Arvuga 5 jaguvad vaid numbrid 0 ja 5.

Kui $c = 0$, siis peab kehtima võrdus $5b = 21a$, millest järeldub, et number $b$ peab jaguma 21-ga. Järelikult $b = 0 = a$, mis on võimatu.

Kui $c = 5$, siis saame võrduse $5b - 21a = 3$ ehk $5b = 21a + 3 = 3(7a + 1)$. Järelikult $5b \geq 24$, kust $b \geq 5$, ja lisaks $b$ jagub 3-ga. Järelikult numbri $b$ väärtuseks sobivad vaid numbrid 6 ja 9.

Kui $b = 6$, siis $7a + 1 = 10$, mis numbrites ei lahendu.

Kui $b = 9$, siis $7a + 1 = 15$, kust $a = 2$.

Järelikult leidub ainult üks tekstis toodud tingimusele vastav arv $n = 2925$.

Hindamisskeem:

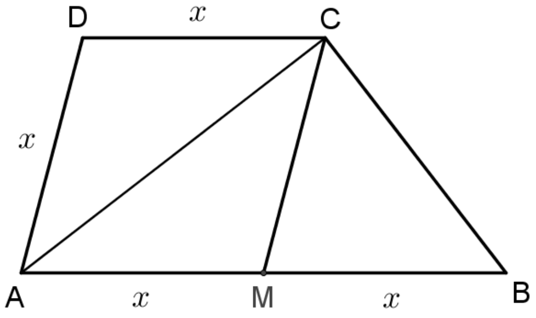
| | |
|---|---|
| neljakohaline arv $n$ esitatud nt kujul $\overline{abac}$ ja saadud võrrand $\overline{abac} = 13 \cdot \overline{aac}$ | 1p |
| rakendatud kümnendesitus | 1p |
| saadud võrdus $25b = 105a + 3c$ | 1p |
| põhjendatud, et $c = 5$ | 2p |
| põhjendatud, et $b = 9$ ja $a = 2$ | 2p |
| | **7p** |

Ainult õige vastuse eest anda 2 punkti.

**4.** Vastus: $\angle ACB = 90°$

Lahendus.

Olgu $M$ külje $AB$ keskpunkt.




Siis $|AM| = |BM| = x$.

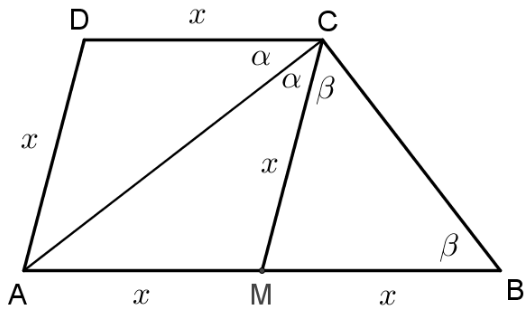
Vaatleme nelinurka $ADCM$. See on võrdsete külgedega rööpkülik, st romb. Järelikult $|CM| = x$. Selle diagonaal $AC$ jaotab nurga $DCM$ pooleks, st

$$\angle DCA = \angle ACM = \alpha.$$

(sama tulemuseni on võimalik jõuda ka võrdhaarsete kolmnurkade $ADC$ ja $AMC$ kaudu, kasutades nt põiknurkade $DCA$ ja $CAM$ võrdsust)

Vaatleme kolmnurka $BMC$. See on võrdhaarne ($|BM| = |CM| = x$), seega selle alusnurgad on võrdsed, st

$$\angle MBC = \angle MCB = \beta.$$




Teame, et trapetsi haara lähisnurkade summa on 180°, seega

$$180° = \angle MBC + \angle DCB = \beta + \alpha + \alpha + \beta = 2(\alpha + \beta),$$

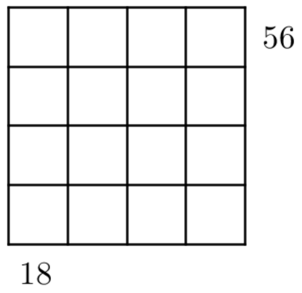
kust $\alpha + \beta = 90°$. Kuna otsitav nurk $ACB$ on suurusega $\alpha + \beta$, siis see on täisnurk.

Hindamisskeem:

| | |
|---|---|
| lisakonstruktsioon (nt külje $AB$ keskpunkt $M$) | 1p |
| näidatud, et $\angle DCA = \angle ACM$ (vastavalt lahendusele) | 2p |
| näidatud, et $\angle MBC = \angle MCB$ (vastavalt lahendusele) | 2p |
| kasutatud, et trapetsi haara lähisnurkade summa on 180° | 1p |
| leitud, et nurga $ACB$ suurus on 90° | 1p |
| | **7p** |

Ainult õige vastuse eest anda 1 punkt.

**5.** Vastus: ainus võimalik summa 29




Lahendus.

Vaatleme tabeli esimest rida. Kuna nelja erineva arvu suurim võimalik summa on $16 + 15 + 14 + 13 = 58$, siis on ainult kaks võimalust esimesse ritta arvude valikuks:

A) 16, 15, 14 ja 11 või B) 16, 15, 13 ja 12.

Vaatleme neid eraldi.

a) Esimeses reas on arvud 16, 15, 14 ja 11.

Kuna kolme arvu vähim võimalik summa on $1 + 2 + 3 = 6$, siis ülemises vasakpoolses nurgaruudus saab olla vaid arv 11. Järelikult esimese veeru teiste kolme arvu summa peab olema 7. Selliste kolme arvu valikuks on vaid üks võimalus: 1, 2 ja 4.

Teame, et teise ritta kirjutatud iga arv peab olema vahetult tema alla kirjutatud arvust kaks korda suurem. Kasutamata on jäänud arvud 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 ja 13. Neist pole võimalik moodustada kolme erinevatest arvudest koosnevat paari nii, et igas paaris oleks üks arv teisest kaks korda suurem. Järelikult selline olukord on võimatu.

b) Esimeses reas on arvud 16, 15, 13 ja 12.

Kuna kolme arvu vähim võimalik summa on 6, siis ülemises vasakpoolses nurgaruudus saab olla vaid arv 12 ja esimese veeru ülejäänud arvudeks ongi 1, 2 ja 3, kusjuures arv 2 asub teises reas, 1 kolmandas ja 3 neljandas reas (kuna neist kolmest arvust erinevad kaks korda vaid arvud 1 ja 2).

Kasutamata on jäänud arvud 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ja 14. Neist saab moodustada täpselt kolm erinevatest arvudest koosnevat paari nii, et igas paaris oleks üks arv teisest kaks korda suurem. Nendeks on 4 ja 8, 5 ja 10 ning 7 ja 14. Järelikult kirjutame need kuus arvu teise ja kolmandasse ritta ja ülejäänud arvud 6, 9 ja 11 neljandasse ritta. Järelikult neljandas reas on arvud 3, 6, 9 ja 11 ning nende summa on 29.

Hindamisskeem:

| | |
|---|---|
| põhjendatud, et esimeses reas on kas arvud 16, 15, 14 ja 11 või 16, 15, 13 ja 12 | 1p |
| näidatud, et ülemises vasakpoolses nurgaruudus on kas arv 11 või 12 | 1p |
| tõestatud, et esimesse ritta ei saa olla kirjutatud arvud 16, 15, 14 ja 11 | 2p |
| tõestatud, et kui esimesse ritta on kirjutatud arvud 16, 15, 13 ja 12, siis viimases reas on kindlasti arvud 3, 6, 9 ja 11 | 2p |
| leitud arvude 3, 6, 9 ja 11 summa 29 | 1p |
| | **7p** |